6. ФУНКЦИИ ОДНОЙ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ФУНКЦИЯ КОББА-ДУГЛАСА

План:

Ключевые слова и словосочетания:

Функция многих переменных, область существования или область определения функции, множество значений функции, равенство функций, сужением функции, ограниченные функция, сложная функция (суперпозиция или композиция), неявная функция, параметрическое задание функций, выпуклые и вогнутые функции, четная и нечетная функция, периодическая функция, выпуклая (вогнутая) функция, возрастающая (неубывающая) функция, строго возрастающая функция, убывающая (невозрастающая) функция, строго убывающая функция, монотонные функции, строго монотонные функции, обратная функция, производственная *функция, двухфакторная производственная функция Кобба – Дугласа, экономико-математические характеристики производственной функции.*

1. Понятие функции

Пусть M - некоторое множество точек n-мерного пространства R^n, т.е. $\mathsf{M}=\{X(x_1;x_2;\ldots;x_n)\}\subseteq R^n$.

1. Если каждой точке $X\in\mathsf{M}$ поставлено в соответствие определенное действительное число $f(X)$, то говорят, что на множестве M **задана функция** $y=f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ **многих переменных,** а именно, $\boldsymbol{n}$**-переменных** $x_1,x_2,...,x_n$. При этом, число $f(X)$ называют **значением функции** y **в точке** X**.**

В частности,

если $\mathsf{M} \subseteq R^1$, т.е. M является подмножеством множества действительных чисел R^1, говорят, что на множестве M задана функция одной переменной $y = f(x)$.

Примеры

1. $f(x) = \lg x$ - функция одной переменной x, заданная на множестве $\mathsf{M} = \{x : x \in R^1, \quad x > 0\}$. В частности $f(10) = \lg 10 = 1$. ▲

2. $f(X) = \dfrac{1 - x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ - функция двух переменных x_1, x_2, заданная на множестве $\mathsf{M} = R^2 \setminus \{O(0,0)\}$. В частности, в точке $A(1;-1)$ имеем

$$f(A) = \frac{1 - 1 \cdot (-1)}{1^2 + (-1)^2} = 1. \ ▲$$

3. $f(X) = \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ - функция трех переменных $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$, заданная на множестве $\mathsf{M} = \{X : X \in R^3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4\}$. В частности, в точке $A(1;1;1)$ имеем $f(A) = \sqrt{4 - 1^2 - 1^2 - 1^2} = 1$. ▲

Упражнения

1. Найти значение функции $y = \dfrac{x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4}{1 - x_1^2 - x_2^2}$ в точках окружности $x_1^2 + x_2^2 = R^2$. ►

2. Найти $f(x_1, \quad x_2)$, если $f(x_1 + x_2, \quad x_1 - x_2) = x_1 x_2 + x_2^2$. ►

Замечание. Обратим внимание на правомерность фразы: **функция многих переменных.** С точки зрения общего определения всех функций, которое приводятся в математической литературе: **функция - отображение множества** A **на множество** B, $B = f(A)$, $A \in \mathsf{A}$, $B \in \mathsf{B}$, эта фраза не кажется правомерной. В самом деле, все функции выступают как функции одного аргумента $A \in \mathsf{A}$. Значит, и функцию, заданную на множестве пространства R^n, следует считать функцией одного переменного X (X - точка пространства R^n).

В связи с этим запись

$$y = f(X),\ X \in \mathrm{M} \subseteq R^n,$$

кажется более правомерной, чем запись

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n),\ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{M} \subseteq R^n.$$

Первая запись не только более правомерна, но и более кратка. Однако от второй записи действительных функций многих переменных мы отказываться не будем. Дело в том, что для изучения функций и операций над ними будет использовано все то, что будет получено в связи с изучением функций одного переменного. Вторая запись функции многих переменных предпочтительнее потому, что, закрепив в ней значения $x_2, x_3, ..., x_n$, мы получим функцию только одного действительного переменного x_1. Ее мы можем изучать с привлечением всех методов, добытых в связи с исследованием функций одного действительного переменного. Изучив особенности функции по каждому из переменных, мы сможем вынести суждение об особенностях функции по совокупности всех переменных. К такому приему изучения функций многих переменных прибегают весьма часто.

Однако, и мы это еще раз подчеркнем, фраза **«функция многих переменных»** означает только форму (удобную) записи функции. Можно и функцию одного переменного записать в форме функции даже бесконечного числа переменных. В самом деле, всякое действительное число $x = [x], x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$, где $[x]$ - целая часть числа x, x_1 - число десятых, x_2 - сотых и т.д. Поэтому

$$y = f(x) = f([x], x_1, x_2, ..., x_n, ...),$$

т.е. функция одного переменного, записана в форме функции бесконечного числа переменных, каждое из которых принимает только целые значения.

После этого отступления мы приходим к следующему определению функции многих переменных.

2. Функцией n переменных называется отображение множества М пространства R^n на множество действительных чисел и записывают функцию так:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X),\ X = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in \mathrm{M} \subseteq R^n.$$

Очевидно, что выше приведенные два определения функции многих переменных эквивалентны.

Множество М называется **областью существования** или **областью определения функции** и обозначается $D(f)$; $D(f) \subseteq R^n$.

В случае, когда функция задана формулой, а область определения ее не указана, тогда под областью определения функции мы будем понимать множество всех точек, в которых выполнимы все операции формулы.

Множество всех значений, которые принимает функция $y = f(X)$ во всех точках своей области определения $D(f)$, называется **множеством значений функции** и обозначается $E(f)$; $E(f) \subseteq R^1$.

Примеры

4. $f(x) = \sqrt{x-1}$ - функция одной переменной x;

$$D(f) = [1, +\infty) \subset R^1; \quad E(f) = [0, +\infty) \subset R^1. \ \blacktriangle$$

5. $f(X) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ - функция двух переменных;

$$D(f) = R^2 \setminus \{O(0,0)\} \subset R^2; \quad E(f) = (0, +\infty) \subset R^1. \ \blacktriangle$$

6. $f(X) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ - функция трех переменных;

$$D(f) = \{X : X \in R^3, \ \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\} \subset R^3; \quad E(f) = [0,1] \subset R^1. \ \blacktriangle$$

Упражнения

Найти области определения заданных функций.

1. $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}}$. 2. $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. 3. $y = \sqrt{x_2 \sin x_1}$. ►

5. $\boldsymbol{y} = 1 + \sqrt{-(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^2}$. **6.** $y = \ln(x_1^2 + x_2)$. **7.** $y = \ln(x_1 + x_2)$. ►

8. $y = arctg\,\dfrac{x_1 - x_2}{1 + x_1^2 x_2^2}$. **9.** $y = x_1 + \arccos x_2$. **10.** $y = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$. ►

11. $y = \sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2}$. 12. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x_2 - \sqrt{x_1}}}$. 13. $y = \arcsin \dfrac{x_2}{x_1}$. ►

2. Равенство функций. Операции над функциями

Функции f и g называются **равными** или **совпадающими,** если они имеют одну и ту же область определения M и для каждого $X \in \mathrm{M}$ значения этих функций совпадают. В этом случае пишут

$$f(X) = g(X), \quad X \in \mathrm{M} \quad \text{или} \quad f = g.$$

Пример 7. Если $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in R^1$ и $g(x) = |x|$, $x \in R^1$, то $f = g$, так как при всех $x \in R^1$ справедливо равенство $\sqrt{x^2} = |x|$. ▲

Если $\mathrm{M}' \subset D(f)$, то функцию $g(X) = f(X)$, $X \in \mathrm{M}'$ называют **сужением функции** f на множество M'.

Пример 8. Если $\mathrm{M}' = [0,+\infty)$, то функция $g(x) = x$, $x \in \mathrm{M}'$ является сужением функции $f(x) = |x|$, $x \in R^1$ на множество M'. ▲

Если равенство $g(X) = f(X)$ верно при всех $X \in \mathrm{M}'$, где $\mathrm{M}' \subset D(f) \cap D(g)$, т, е. сужения функций f и g на множество M' совпадают, то в этом случае говорят, что функции f и g равны на множестве M'. Например, функции $\sqrt{x^2}$ и x равны на множестве $\mathrm{M}' = [0,+\infty)$.

Естественным образом для функций вводятся арифметические операции.

Пусть функции f и g определены на одном и том же множестве M. Тогда функции, значения которых в каждой точке $X \in \mathrm{M}$ равны

$$f(X) + g(X), \quad f(X) - g(X), \quad f(X)g(X), \quad \frac{f(X)}{g(X)}, \quad (g(X) \neq 0 \quad \forall X \in \mathrm{M}),$$

называют, соответственно, **суммой, разностью, произведением и частным функций** f и g и обозначают $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$.

Упражнения

Найти области определения функций f, g, $f+g$.

1. $f(x)=\sqrt[4]{3-x}$, $\quad g(x)=\sqrt{x+1}$. ►

2. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $\quad g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{2x-1}}$. ►

3. $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$, $\quad g(x)=\lg(x^2-4)$. ►

4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{5x-x^2}}$, $\quad g(x)=tgx$. ►

5. $f(x)=\lg(16-x^2)$, $\quad g(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}$. ►

6. $f(x)=x+\sqrt{x-1}$, $\quad g(x)=x-\sqrt{x-1}$. ►

3. Ограниченные функции

Функция $y=f(X)$ определенная на множестве М, называется **ограниченной сверху (снизу),** если множество принимаемых ею на М значений ограничено сверху (снизу).

Ограниченность сверху (снизу) функции $y=f(X)$ на множестве М означает существование такого числа c, что для всех точек $X\in$ М выполняется неравенство $f(X)\le c$ $\left(f(X)\ge c\right)$.

Функция $y=f(X)$ называется ограниченной на множестве М, если она ограничена на этом множестве и сверху, и снизу.

В частности, если М является окрестностью некоторой точки $\boldsymbol{A}$, т.е. М $=S_\varepsilon(A)=\{X : X\in R^n,\quad \rho(X,A)<\varepsilon\}$, то говорят об ограниченности функции $y=f(X)$ в данной окрестности точки A.

Если М - область определения $D(f)$ функции $y=f(X)$, то говорят об ограниченности функции в области определения, при этом множество значений $E(f)$ является ограниченным множеством.

Если функция $y = f(X)$ не ограничена сверху (снизу) на множестве M, то существует последовательность $\{X_k\}$ $(k = 1,2,....)$ точек, принадлежащих M, такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\{f(X_k)\} = +\infty \qquad \left(\lim_{k\to\infty}\{f(X_k)\} = -\infty\right).$$

Примеры

9. Функция $f(x) = \sin x$ ограничена во всей области определения $D(f) = (-\infty, +\infty)$, так как множество ее значений $E(f) = [-1,1]$ - множество ограниченное $(-1 \le \sin x \le 1)$. ▲

10. Функция $f(X) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ ограничена лишь снизу во всей области определения $D(f) = R^2 \setminus \{(0,0)\}$, так как множество ее значений $E(f)$ ограничено только снизу так, что $f(X) > 0$. Функция не ограничена сверху в любой окрестности точки $O(0,0)$: существует последовательность

$$X_k\left(\frac{1}{k}, \ \frac{1}{k}\right), \ k = 1,2,....$$

сходящаяся к точке $O(0,0)$ и такая, что последовательность значений функции

$$f(X_k) = \frac{1}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{k^2}{2}$$

стремится к $+\infty$. ▲

Упражнения

1. Показать, что функция $y = \dfrac{1}{x^2}$, $\quad x \in R^1$, $x \ne 0$, неограниченна, и построить ее график. ►

2. Показать, что функция $y=\dfrac{x^3}{x^4+1}$, $\quad x\in R^1$, ограничена. ►

3. Показать, что сумма и произведение ограниченных функций – ограниченная функция. ►

4. Сложные функции (суперпозиции)

Пусть функция $y=f(u_1,u_2,...,u_m)$ определена на некотором множестве $\mathsf{W}\subseteq R^m$ переменных $u_1,u_2,...,u_m$, а каждая из функций

$$u_1=g_1(x_1,x_2,...,x_n),\quad u_2=g_2(x_1,x_2,...,x_n)\quad ,...,\quad u_m=g_m(x_1,x_2,...,x_n)$$

определена некотором множестве $\mathsf{M}\subseteq R^n$ переменных $x_1,x_2,...,x_n$.

Если при этом каждой точке $X(x_1;x_2;...,x_n)\in\mathsf{M}$ можно поставить в соответствие точку $U(u_1;u_2;...,u_m)\in\mathsf{W}$, где

$$u_1=g_1(x_1,x_2,...,x_n),\quad u_2=g_2(x_1,x_2,...,x_n)\quad ,...,\quad u_m=g_m(x_1,x_2,...,x_n),$$

то на множестве $\mathfrak{M}$ определяется функция

$$y=f\big(g_1(x_1,x_2,...,x_n),\quad g_2(x_1,x_2,...,x_n)\quad ,...,\quad g_m(x_1,x_2,...,x_n)\big),$$

называемая **сложной функцией переменных** $x_1,x_2,...,x_n$ **или суперпозицией (композицией) функций** $f,g_1,g_2,...,g_m$.

В частности, если даны две функции одной переменной $y=f(u),\ u=g(x)$ и при этом $E(g)\subseteq D(f)$) (множество значений функции g является подмножеством области определения функции f), то говорят о сложной функции $y=f\big(g(x)\big)$ одной переменной x.

Примеры

11. Следующие пара функций $y=2^u$, $u=\sin x$ задает сложную функцию $y=2^{\sin x}$, определенную на множестве R^1 и имеющую множеством значений отрезок $\left[\dfrac{1}{2},\ 2\right]$. ▲

12. Аналогично, функция $y = \ln\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ является суперпозицией следующих функций

$$y = \ln u, \;\; u = \cos v, \;\; v = \frac{1}{z}, \;\; z = \sqrt{x}.$$

5. Неявные функции

Говорят, что функция $y = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ неявно задана уравнением $F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$, если существует множество $\mathsf{M} \subseteq R^n$ такое, что для всех точек $X(x_1; x_2; ...; x_n) \in \mathsf{M}$ справедливо тождество

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \equiv 0.$$

Одно и то же уравнение может задавать неявно не одну, а несколько функций. Например, уравнение $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ задает неявно две функции

$$y_1 = f_1(X) = +\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}$$

и

$$y_2 = f_2(X) = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2},$$

определенные на множестве $\mathsf{M} = \{X : X \in R^n, \;\; x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le 1\}$

В частности, уравнение $F(x, y) = 0$ при указанных предположениях задает неявно функцию $y = f(x)$ одной переменной x; уравнение $F(x_1, x_2, y) = 0$ задает неявно функцию $y = f(x_1, x_2)$ двух переменных и т. д.

Название «неявная функция» отражает способ задания функциональной зависимости.

6. Параметрическое задание функций

Часто бывает полезно (например, при изучении неявных функций) функциональную зависимость между несколькими переменными выражать через вспомогательные переменные - параметры. Так, для функции, неявно заданной уравнением $F(x, y) = 0$, необходимо каждую из переменных x и y выразить через один параметр; для функции, неявно заданной уравнением $F(x_1, x_2, y) = 0$, необходимо каждую из переменных x_1, x_2, y выразить через два параметра.

Выражение переменных через параметры называют **параметрическим заданием** функциональной зависимости.

Примеры

13. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ задается параметрически в виде $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$, где $0 \le t \le 2\pi$. ▲

14. Прямая линия в пространстве имеет параметрическое задание $x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt$, где $(x_0, \quad y_0, \quad z_0)$ - точка, через которую проходит прямая; $(m, \quad n, \quad p)$ - вектор, параллельный прямой; $-\infty < t < +\infty$. ▲

15. Зависимость $z = x^2 + y^2$ (параболоид вращения) может быть задана параметрически в виде $x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = r^2$, где параметры r и t изменяются в следующих пределах: $0 \le r \le +\infty$; $0 \le t \le 2\pi$. ▲

7. Выпуклые и вогнутые функции

Пусть функция $y = f(X)$ определена на выпуклом множестве $\mathrm{M} \subseteq R^n$.

Функция $y = f(X)$ называется **выпуклой (вогнутой)** на множестве M, если для любых двух точек $X(x_1; x_2; ..., x_n)$ и $Y(y_1; y_2; ..., y_n)$, принадлежащих M, и для любого действительного числа $0 \le \lambda \le 1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y) \quad \big(f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \ge \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)\big).$$

Примеры

16. Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$ - выпуклая на $\boldsymbol{R}^1$. Действительно, для произвольных $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^1$ и любого $\lambda \in [0,1]$ получим

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(z)-f(\lambda x+(1-\lambda)z)=\lambda x^2+(1-\lambda)z^2-(\lambda x+(1-\lambda)z)^2=$$

$$=\lambda(1-\lambda)x^2-2\lambda(1-\lambda)xz+\lambda(1-\lambda)z^2=\lambda(1-\lambda)(x-z)^2\geq 0. \ \blacktriangle$$

17. Линейная функция

$$f(X)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

является одновременно и выпуклой, и вогнутой на всем пространстве R^n.

18. Квадратичная (форма) функция

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k$$

является выпуклой (вогнутой) на R^n тогда и только тогда, когда она является **знакоположительной** (**знакоотрицательной**), т.е. принимает неотрицательные (неположительные) значения.

Например, квадратичная (форма) функция

$$f(X)=2x_1^2+11x_2^2+52x_3^2+8x_1x_2+4x_1x_3-16x_2x_3,$$

является выпуклой на пространстве R^3.

Действительно,

$$f(X)=2(x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3)+11x_2^2+52x_3^2-16x_2x_3=$$

$$=2(x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+x_3^2+4x_2x_3)+3x_2^2+50x_3^2-24x_2x_3=$$

$$=2(x_1+2x_2+x_3)^2+3(x_2^2-8x_2x_3+16x_3^2)+2x_3^2=$$

$$=2(x_1+2x_2+x_3)^2+3(x_2-4x_3)^2+2x_3^2\geq 0.$$

во всех точках пространства R^3, т.е. данная квадратичная функция $f(X)$ является знакоположительной. ▲

Свойства выпуклых функций

1°. Функция $f(X)$ выпукла на множестве М тогда и только тогда, когда функция $-f(X)$ вогнута на М.

2°. Если функции $f_1(X)$ и $f_2(X)$ выпуклы на множестве М, то функция $k_1f_1(X)+k_2f_2(X)$, где k_1,k_2 - произвольные неотрицательные числа, также является выпуклой на М.

3°. Если функция $f(X)$ выпукла на множестве M, то множество $\{X \in \mathsf{M}: f(X) \le b\}$, где b - любое число, если только оно не пусто, само является выпуклым множеством.

4°. Если выпуклая функция $f(X)$ определена на открытом множестве M, то на этом множестве она непрерывна.

Аналогичные свойства имеют место и для вогнутых функций.

8. Специфические свойства функций одной переменной

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $\mathsf{M} \subseteq R^1$, называется **четной** на этом множестве, если множество M симметрично относительно точки $x = 0$ и имеет место равенство $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in \mathsf{M}$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат Oy.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $\mathsf{M} \subseteq R^1$, называется **нечетной** на этом множестве, если множество M симметрично относительно точки $\boldsymbol{x} = 0$ и имеет место равенство $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in \mathsf{M}$.

График нечетной функции симметричен относительна начала координат.

Примеры

19. Функция $y = \cos x$, для которой $D(f) = (-\infty, +\infty)$, является четной функцией, так как $\cos(-x) = \cos x$ для всех $x \in D(f)$. ▲

20. Функция $\boldsymbol{y} = \arcsin \boldsymbol{x}$, для которой $D(f) = [-1,1]$, является нечетной функцией, так как $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ для всех $x \in D(f)$**.** ▲

Функция $y = f(x)$ называется **периодической,** если существует такое положительное действительное число t, что для всех точек x и $x+t$ из области определения функции имеет место равенство $f(x+t) = f(x)$. При этом число t называют **периодом функции**.

Практически всегда ставится вопрос о наименьшем из всех возможных периодов, т.е. о числе $T = \min\limits_{i} t_i$.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, отлична от постоянной и периодическая на R^1, то существует наименьший период T этой функции. Все остальные периоды кратны T.

Примеры

2l. $y = \sin x$ и $y = \cos x$ имеют период $T = 2\pi$. ▲

22. $y = tgx$ и $y = ctgx$ имеют период $T = \pi$. ▲

23. Функция Дирихле

$$y = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x - \textit{рациональное}, \\ 0, & \textit{если} \quad x - \textit{иррациональное}, \end{cases}$$

имеет периодом любое положительное рациональное число, однако не имеет наименьшего периода. ▲

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (неубывающей)** на некотором множестве $\mathsf{M} \subseteq D(f)$, если она определена на этом множестве и если для любых значений $x_1, x_2 \in \mathsf{M}$ из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство

$$f(x_1) \le f(x_2).$$

Если это неравенство является строгим $\left(f(x_1) < f(x_2)\right)$, то функцию $y = f(x)$ называют **строго возрастающей** на множестве M.

Таким образом, функция $y = f(x)$ называется:

а) **возрастающей (неубывающей)** на множестве M, если

$$\forall x_1 \in \mathsf{M} \ \ \forall x_2 \in \mathsf{M}: \ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2);$$

б) **строго возрастающей** на множестве M, если

$$\forall x_1 \in \mathsf{M} \ \ \forall x_2 \in \mathsf{M}: \ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Аналогично, функция $y = f(x)$ называется:

а) **убывающей (невозрастающей)** на множестве M, если

$$\forall x_1 \in \mathrm{M} \quad \forall x_2 \in \mathrm{M}: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

б) **строго убывающей** на множестве M, если

$$\forall x_1 \in \mathrm{M} \quad \forall x_2 \in \mathrm{M}: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Убывающие и возрастающие функции называют **монотонными функциями,** а строго возрастающие и строго убывающие - называют **строго монотонными.**

Если $\mathrm{M} = D(f)$, то в этих определениях указание на множество M обычно опускают.

Примеры

24. $y = \lg x$ - строго возрастающая функция во всей области определения. ▲

25. $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ - строго убывающая функция во всей области определения. ▲

26. $y = x^2$ - строго возрастающая в промежутке $\mathrm{M} = [0,+\infty)$ и строго убывающая в промежутке $\mathrm{M} = (-\infty,0]$. ▲

27. $y = E(x) = [x]$ (целая часть числа $\boldsymbol{x}$) - неубывающая функция. ▲

28. $y = \sin x$**,** строго возрастающая функция на $\mathrm{M} = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{\pi}{2}\right]$. ▲

Упражнения

1. Показать, что функция $f(x) = x^3 + 3x + 5$ возрастает во всей области ее определения. ►

2. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ убывает в промежутке $(1, \ +\infty)$.►

9. Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$ определена в области $D(f) \subset R^1$ и имеет множество значений $E(f)$. Если эта функция такова, что для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ из условия $x_1 \neq x_2$ следует условие $f(x_1) \neq f(x_2)$, то каждому $y \in E(f)$ можно поставить в соответствие определенное $x \in D(f)$ такое, что $f(x) = y$, т. е. на множестве $E(f)$ можно определить функцию $x = g(y)$, называемую **обратной** к заданной функции $y = f(x)$.

Областью определения обратной функции является множество значений $E(f)$ функции $y = f(x)$. Множеством значений обратной функции является область определения $D(f)$ функции $y = f(x)$.

Например, функция $y = x^2$, заданная в промежутке $[0,+\infty)$, имеет обратную функцию $x = +\sqrt{y}$, определенную на множестве $E(y) = [0,+\infty)$ Эта же функция, заданная в промежутке $(-\infty,0]$, имеет обратную функцию $x = -\sqrt{y}$, определенную на множестве $E(y) = [0,+\infty)$. Однако функция $\boldsymbol{y = f(x) = x^2}$, заданная, например, на отрезке $[-2,2]$, не имеет обратной функции, так как $f(-1) = f(1) = 1$ (двум различным значениям аргумента $x = -1$ и $x = 1$ соответствует одно и то же значение y).

Если функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a,b]$, то она имеет обратную функцию $x = g(y)$, определенную, непрерывную и строго монотонную на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.

Упражнения

Являются ли взаимно обратными функции, следующие заданные функции.

1. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, $\quad y = \dfrac{x+1}{x-1}$. $\qquad$ **2.** $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, $\quad y = (1-x)^3$.

3. $y = 1 + \sqrt{x}$, $\qquad y = (x-1)^2$. $\quad$ 4. $y = \sqrt{1-x^2}$, $\qquad y = \sqrt{1-x^2}$. ►

10. Производственная функция и ее некоторые экономико-математические характеристики

Пусть R_+^n положительный ортант n- мерного пространства, каждый вектор $X = (x_1, ..., x_n)$ которого интерпретируется как вектор затрат производственных ресурсов (в стоимостном или натуральном выражении). В качестве факторов производства здесь могут выступать как первичные факторы в обычном понимании, так и продукты производства, внешнего по отношению к изучаемому, выступающие в данном случае как ресурсы или сырье.

Пусть R_+^m - положительный ортант m- мерного пространства, каждый вектор $Y = (y_1, ..., y_m)$ которого интерпретируется как набор количественных оценок результатов производства при определенных затратах ресурсов. Такими количественными оценками могут служить, например, физический объем выпуска по каждому из наименований выпускаемой продукции, стоимостные показатели.

Если P- некоторый производственный процесс, то **производственной функцией** f этого процесса будем называть отображение $f : D \to V$, где $D \subseteq R_+^n$, $V \subseteq R_+^m$, моделирующее выпуск продукции в процессе P.

Введение множеств D, V обусловлено тем, что в реальных ситуациях построение функции f для процесса P происходит всегда на основе ограниченного статистического материала. В этом случае отчетные данные, на основе которых строится функция, заполняют ограниченные участки соответствующих пространств. При этом может случиться, что удобная аналитическая форма функции f дает хорошие результаты (т.е. достаточно адекватно моделирует процесс P) только в пределах некоторых множеств D и V.

Замечание. Проблема построения производственной функции, так же как и проблема ее использования с целью анализа производства в масштабах народного хозяйства в целом или отдельных его отраслей, представляет собой сложную научную задачу, рецепта, для решения которой в общем случае в настоящий момент не существует.

Отметим сразу, что, несмотря на широту приведенного выше определения производственной функции, до сих пор в научной и прикладной экономико-математической литературе в основном изучался случай $m=1$, т.е. когда имеется единственная количественная оценка результатов производства. В этом случае производственную функцию естественно записывать как обычную функцию нескольких переменных

$$y = f\left(x_1,...,x_n\right). \qquad (1)$$

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело только с таким случаем.

Для введения основных математических характеристик производственной функции и выяснения их экономической интерпретации, рассмотрим двухфакторную производственную функцию. Обозначим через K объем основных фондов, либо в стоимостном выражении, либо в количественном (скажем, число станков). Пусть L - числовое выражение объема трудовых ресурсов, т.е. число рабочих, число человеко-дней, человеко-часов и т.д., Y - объем выпущенной продукции в стоимостном выражении, либо в натуральном, если мы имеем дело с отраслью, выпускающей один продукт. Тогда производственная функция имеет вид

$$Y = F\left(K,L\right). \qquad (2)$$

Ниже в качестве иллюстрации будем рассматривать одну из наиболее распространенных двухфакторных производственных функций - функцию Кобба - Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad (3)$$

где $A > 0$- константа, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$. Обычные требования на производственную функцию (2) заключаются в требовании гладкости, которого мы приведем в последующих лекциях.

Ниже приведем основные экономико - математические характеристики производственной функции (2).

Средняя производительность труда определяется как $y = \dfrac{Y}{L}$ - отношение объема произведенного продукта к количеству затраченного труда. Отметим, что эта характеристика (как и все прочие) является функцией фазовых координат K, L. Средняя фондоотдача; $z = \dfrac{Y}{K}$- отношение объема произведенного продукта к величине основных фондов.

Для функции Кобба - Дугласа, например, средняя производительность труда равна $Y = AK^{\alpha} L^{\beta - 1}$ и в силу условия $\beta < 1$ является убывающей функцией аргумента L. Другими словами, с увеличением затрат труда средняя производительность труда падает. Этот вывод допускает естественное объяснение - поскольку величина второго фактора K остается неизменной, то, значит, вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению производительности труда. Таким образом, становится ясным и значение такой характеристики, как фондовооруженность труда $k = \dfrac{K}{L}$, показывающая объем основных фондов, приходящийся на одного работника.

Наряду со **средними показателями** при анализе производственных функций играют роль и **предельные характеристики функции**. Эти характеристики мы приведем в последующих лекциях.

При изучении производственных функций часто делают различные предположения, в той или иной мере отвечающие экономической реальности. Основное предположение состоит в том, что производственную функцию (2) считают однородной первой степени или линейно-однородной, т.е. требуют выполнения соотношения $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ для всех $\lambda > 0$. Можно по-разному толковать содержательный смысл условия однородности. Здесь (из-за ограниченности возможности) эти толкования и многие другие вопросы, связанные с производственной функцией не приводятся.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение функции многих переменных. Прокомментируйте правомерность фразы: **функция многих переменных.**

2. Что называется областью существования или областью определения функции и как она обозначается?

3. Что называется множеством значений функции и как оно обозначается?

4. Когда две функции называются равными? Что называется сужением функции?

5. Каким образом для функций вводятся арифметические операции?

6. Что называется ограниченной функцией? Приведите примеры.

7. Дайте определение сложной функции многих переменных (суперпозиции или композиции функции многих переменных). Приведите примеры.

8. Когда говорят, что функция задана неявно? Что отражает название «неявная функция»?

9. Что означает параметрическое задание функции?

10. Что называется выпуклой (вогнутой) функцией? Приведите свойства выпуклых функций.

11. Что называется четной (нечетной) функцией?

12. Что называется периодической функцией?

13. Что называется возрастающей (неубывающей) функцией?

14. Что называется строго возрастающей функцией?

15. Что называется убывающей (невозрастающей) функцией?

16. Что называется строго убывающей функцией?

17. Какие функции называются монотонными (строго монотонными) функциями?

18. Что называется обратной функцией к заданной функции? Когда существует обратная функция к заданной?

19. Что называется производственной функцией? Какой вид имеет одна из наиболее распространенных двухфакторных производственных функций - функцию Кобба – Дугласа?

20. Какие экономико-математические характеристики производственной функцией можете приводить?

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoy M., Livernois J., McKenna Ch., Rees R., Stengos T. **Mathematics for Economics.** Second edition. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts; London, England. 2001. - 1130 p. **(50-60; 455 – 457)**

2. Бабаджанов Ш.Ш. **Высшая математика. Часть II**. Учебное пособие. Т.: «IQTISOD MOLIYA», 2015. – 420 с.

3. Малыхин В.И. **Высшая математика.** Учебное пособие. 2- е изд., пераб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2009. - 365 с.